Physik für Maschinenbau

Prof. Dr. Stefan Schael / Dr. Thomas Kirn
RWTH Aachen

Vorlesung 3

Wiederholung

Bewegungsgleichung bei konstanter Beschleunigung, d.h. a(t)=a, z.B. beim freien Fall a(t)=g:

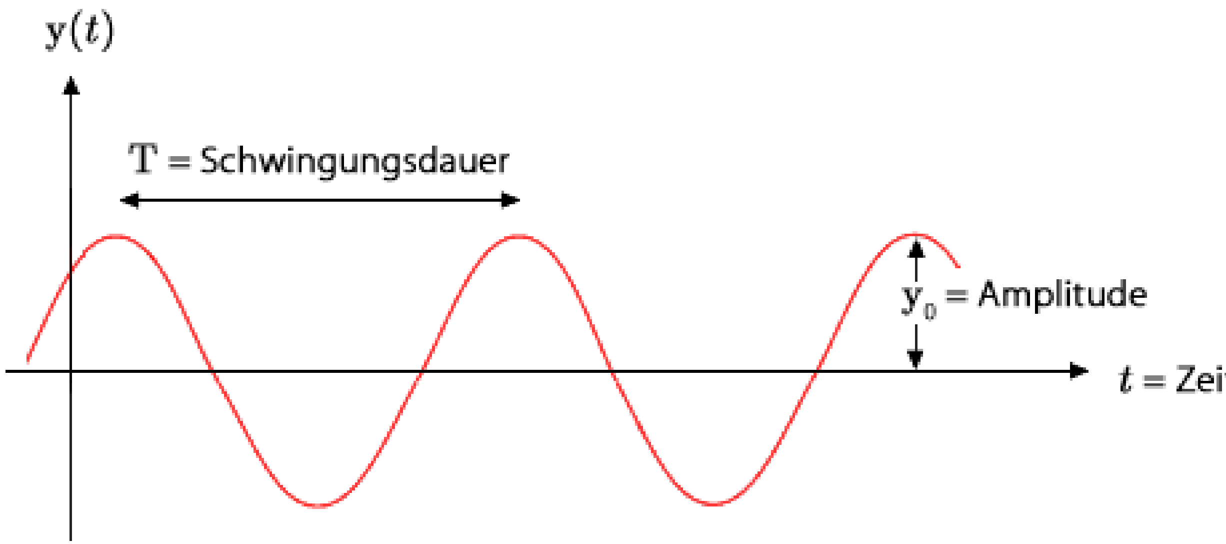
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

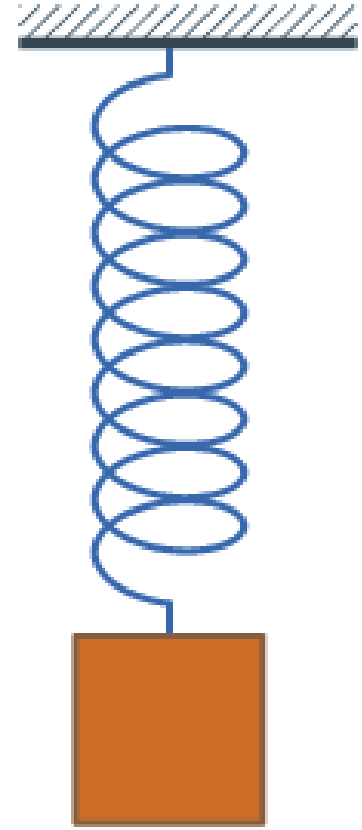
Anfangsbedingungen:

$$v(t=0) = v_0 \qquad s(t=0) = s_0$$

Die Bewegungsgleichung ist unabhängig von der Masse !

Schwingungen

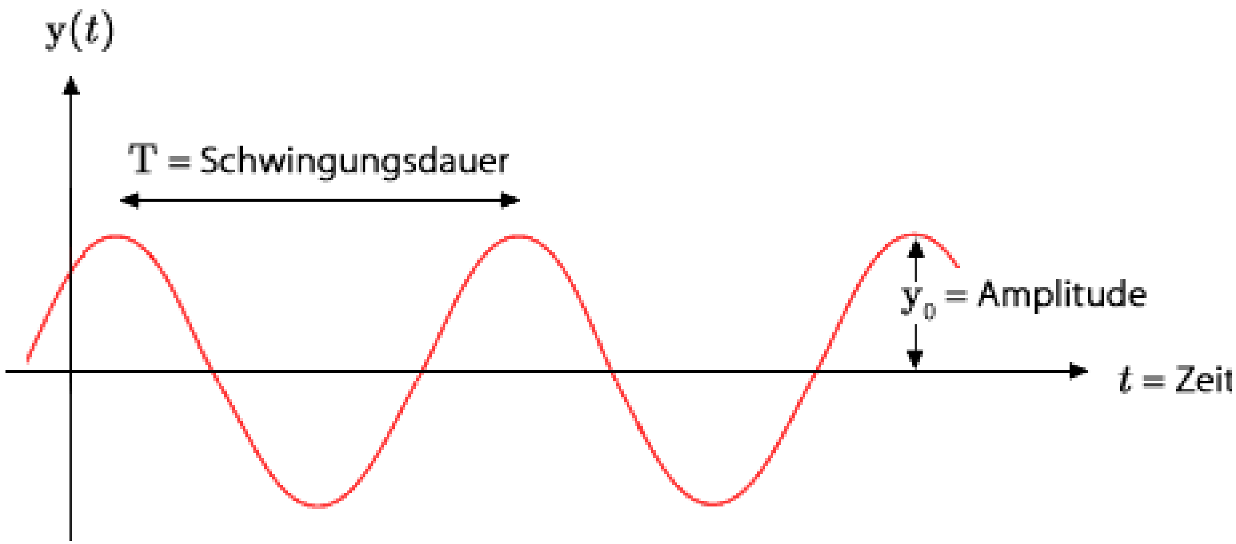


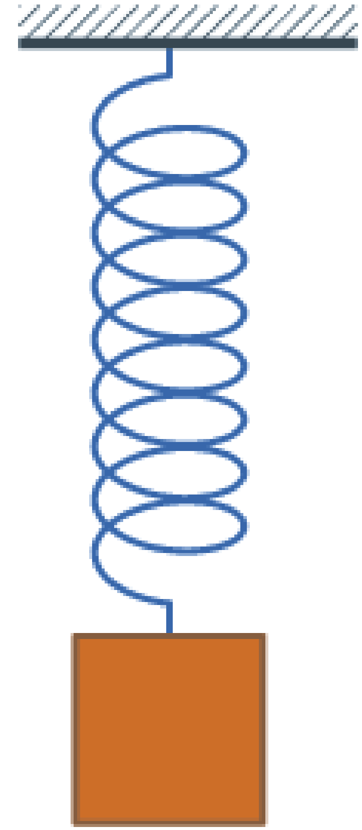


Fragen: Hängt die Schwingungsdauer ab von

- **der angehängten Masse?**
- **der Amplitude?**
- **der Federkonstanten?**

Schwingungen





Frage: Wovon hängt die Schwingungsdauer ab ? $T = f\left(\frac{M}{D}\right)$

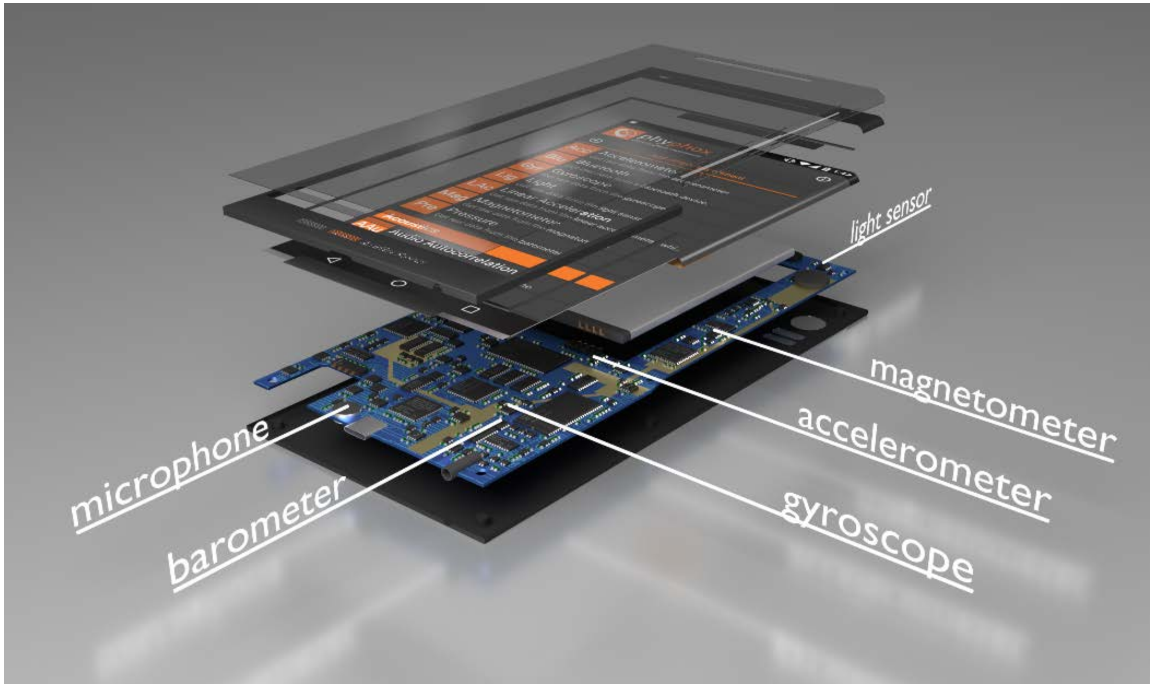
1. **Periodendauer hängt nicht von der Auslenkung ab.**
2. **Je größer die Masse, desto größer die Periodendauer.**
3. **Je stärker die Feder, desto kleiner die Periodendauer.**

https://phyphox.org/de/home-de/

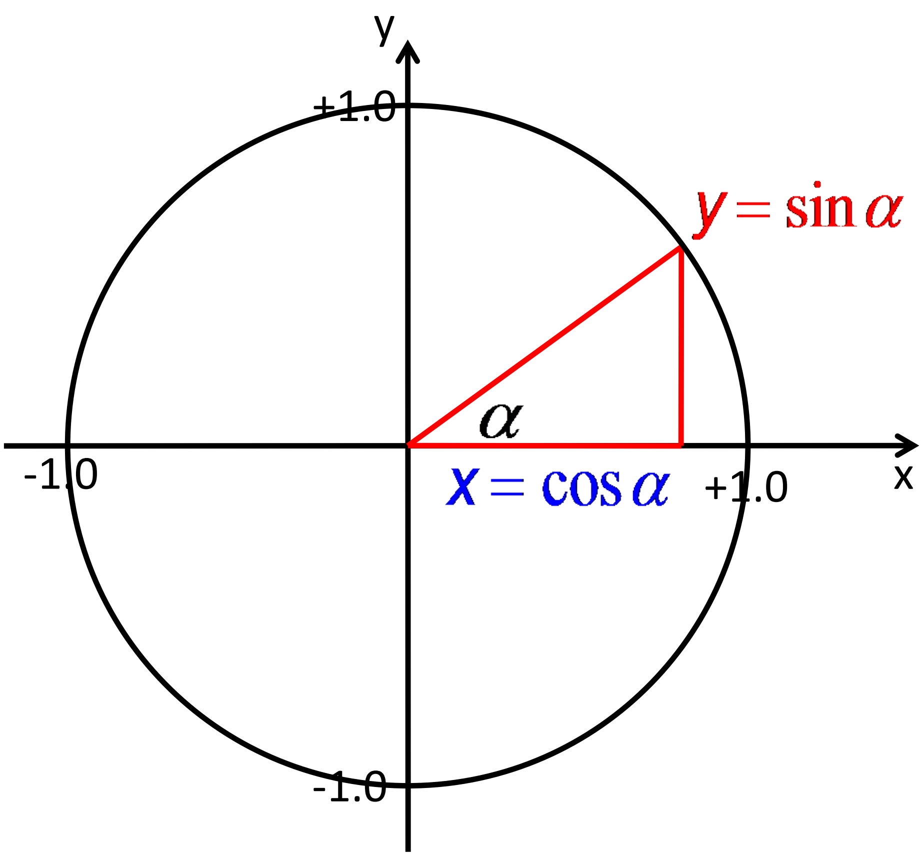
Was ist phyphox?

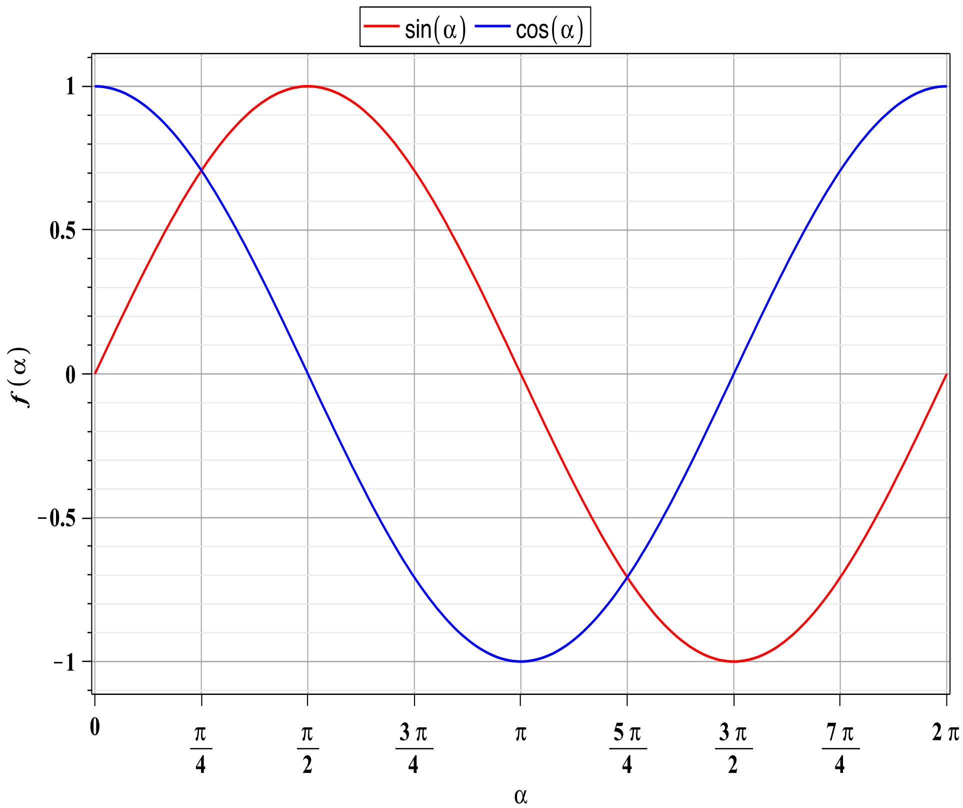
- phyphox steht für „physical phone experiments“
- Möglichkeit, in Smartphones vorhandenen Sensoren auszulesen

  → Labor in der Hosentasche

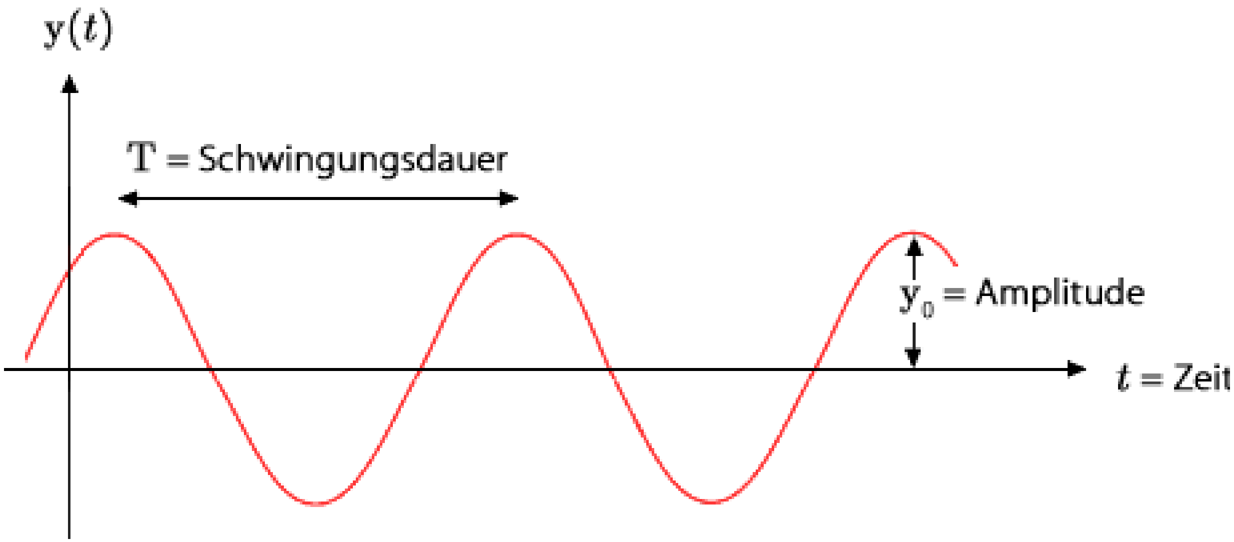


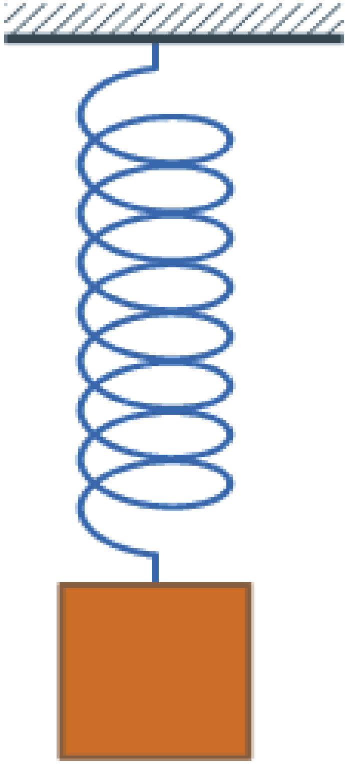
sin- und cos-Funktion





Schwingungen





$$DGL: \qquad \ddot{x}(t) = -\frac{D}{M} x(t)$$

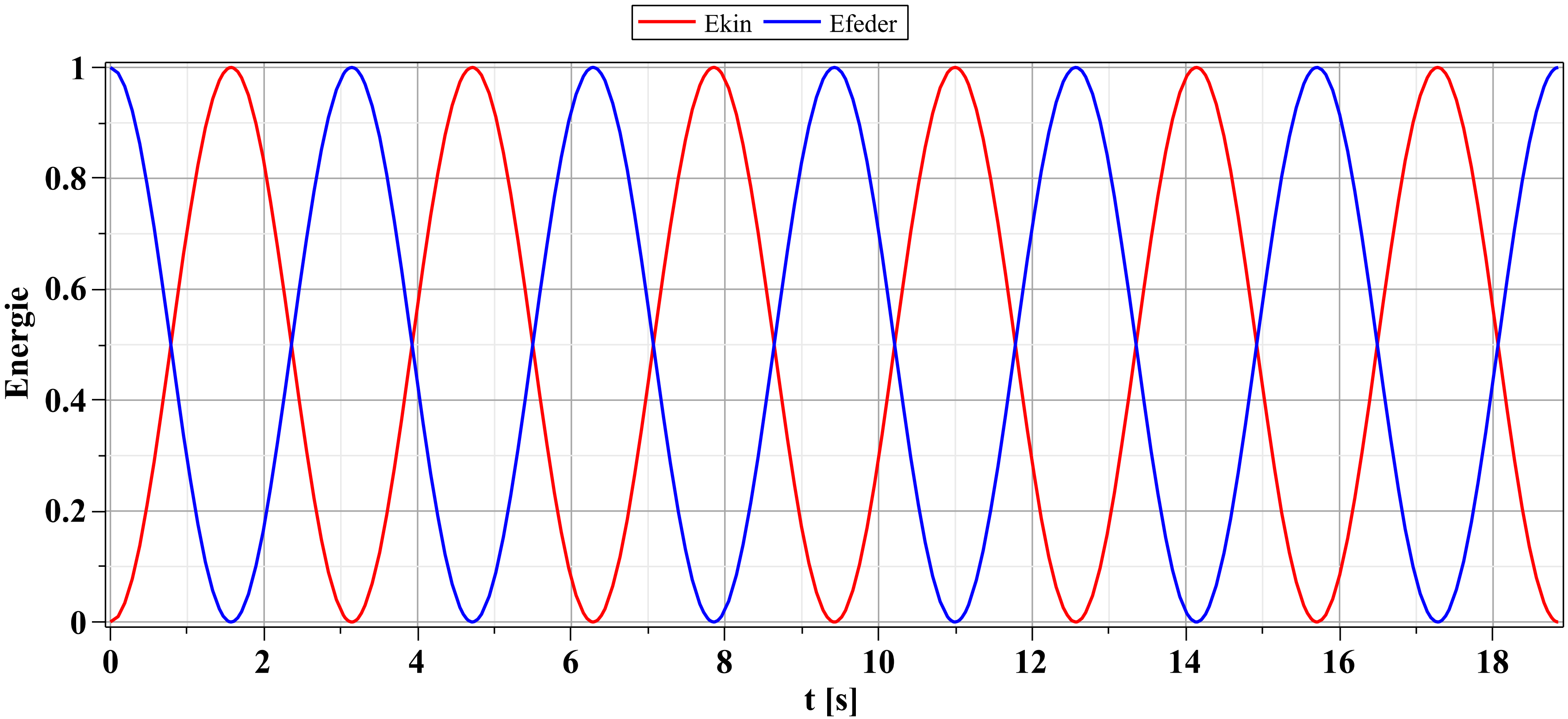
$$\text{Lösung:} \qquad x(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{D/M} \qquad [\omega] = \frac{1}{s} = Hz$$

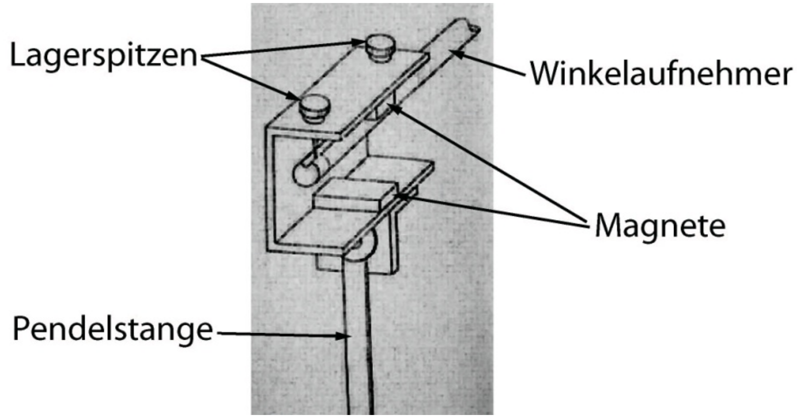
$$\text{Schwingungsdauer:} \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D}}$$

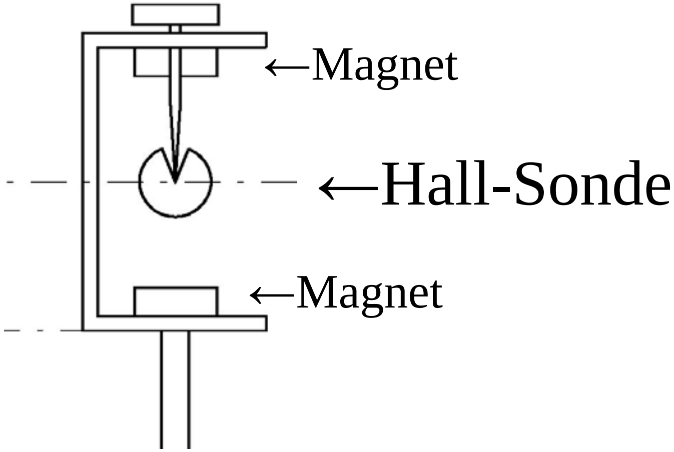
$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{110g}{210g}} = 0.72 \qquad \text{gemessen: } \frac{8.6s}{11.6s} = 0.74$$

Energie bei der Federschwingung



Versuch Pendel an gelber Wand





Orientierung der Hall-Sonde:

→ Empfindlich auf horizontale B-Komponente B_h

Ruhezustand → $B_h = 0 \rightarrow U = 0$

Auslenkung um Winkel → $B_h = B \cdot \sin\delta$ → $U \approx B_h \approx \delta$

Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion f(x) um die Stelle a ist gegeben durch:

$$P_f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Damit ergibt sich für $\sin x$ um a=0:

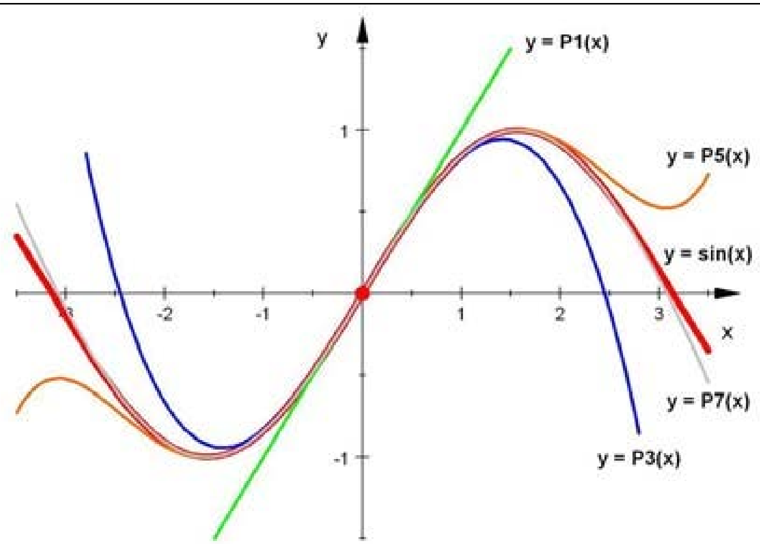
$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

D.h. Eine gute Näherung für kleine Winkel ist : $\sin\alpha \approx \alpha$

Wie gut ist diese Näherung: $2\pi = 360^\circ$

$$\frac{\pi}{180} = 1^\circ$$

α /°	α /rad	$\sin\alpha$
0	0	0
1	0,01745	0,01745
2	0,03491	0,03490
5	0,08727	0,08716
10	0,17453	0,17365
15	0,26180	0,25882
30	0,52360	0,5000
45	0,78540	0,70711 = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$



Approximation von sin(x) durch Taylorpolynome bis zur 7. Ordnung.

Reibung: Stokes Gesetz

Kleine, langsame Kugel mit Radius r in einer viskosen Flüssigkeit

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r\vec{v}$$

η: Viskosität der Flüssigkeit

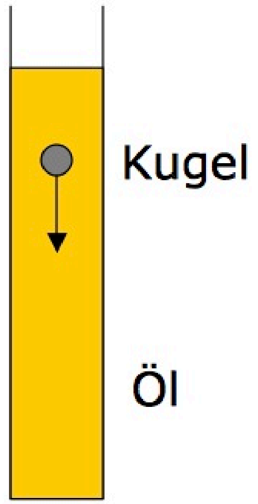
Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit

Nach anfänglicher Beschleunigung ergibt sich eine konstante Sinkgeschwindigkeit. Jetzt sind Gewichtskraft und Reibungskraft im Gleichgewicht und es gilt:

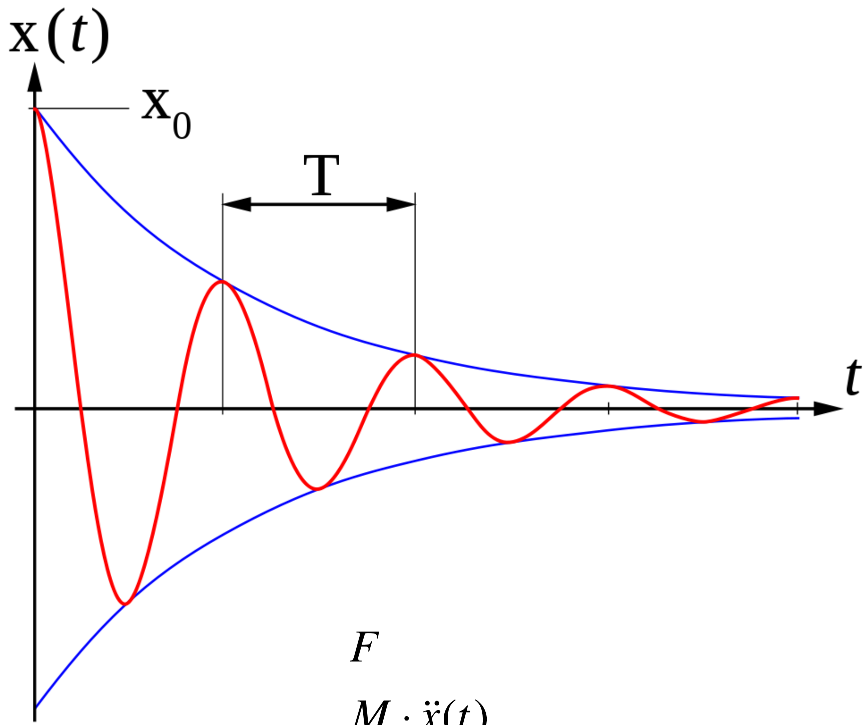
$$\vec{F}_R = -\vec{F}_G$$

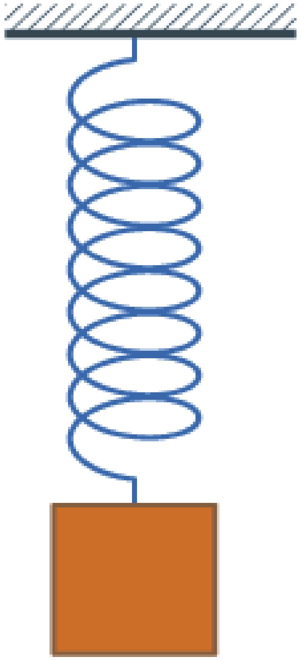
$$-6\pi\eta r\vec{v} = -m\vec{g}$$

$$\vec{v} = \frac{m\vec{g}}{6\pi\eta r}$$



Gedämpfte Schwingungen





$$F = -D \cdot x(t) - \gamma v(t)$$

$$M \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t) - \gamma \dot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{\gamma}{M}\dot{x}(t) + \frac{D}{M}x(t) = 0$$

Beobachtung:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \qquad [\tau] = s$$

$$
\begin{aligned}
F &= -D\cdot x(t) - \gamma v(t)\\
M\cdot\ddot{x}(t) &= -D\cdot x(t) - \gamma\dot{x}(t)\\
\ddot{x}(t) + \frac{\gamma}{M}\dot{x}(t) + \frac{D}{M}x(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Beobachtung:

$$A(t) = A_0\cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \qquad [\tau] = s$$

Ansatz:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A(t)\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)\\
\dot{x}(t) &= \dot{A}(t)\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right) - A(t)\cdot\omega_d\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)\\
\ddot{x}(t) &= \ddot{A}(t)\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right) - \dot{A}(t)\cdot\omega_d\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)\\
&\quad - \dot{A}(t)\cdot\omega_d\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right) - A(t)\cdot\omega_d^2\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)\\
&= \ddot{A}(t)\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right) - 2\dot{A}(t)\cdot\omega_d\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right) - A(t)\cdot\omega_d^2\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= \ddot{A}(t)\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)-\dot{A}(t)\cdot\omega_d\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)\\
&\quad -\dot{A}(t)\cdot\omega_d\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)-A(t)\cdot\omega_d^2\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)\\
&= \ddot{A}(t)\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)-2\dot{A}(t)\cdot\omega_d\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)-A(t)\cdot\omega_d^2\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)
\end{aligned}
$$

$$\alpha=\omega_d\cdot t+\varphi$$

$$\ddot{A}\cos\alpha-2\dot{A}\omega_d\sin\alpha-A\omega_d^2\cos\alpha+\frac{\gamma}{M}\left(\dot{A}\cos\alpha-A\omega_d\sin\alpha\right)+\frac{D}{M}A\cos\alpha \qquad =0$$

$$\left(\ddot{A}-A\omega_d^2+\dot{A}\frac{\gamma}{M}+A\frac{D}{M}\right)\cos\alpha+\left(-2\dot{A}\omega_d-A\omega_d\frac{\gamma}{M}\right)\sin\alpha \qquad =0$$

Diese Gleichung soll für alle Zeiten t erfüllt sein:

$$
\Rightarrow \qquad
\begin{aligned}
\ddot{A}-A\omega_d^2+\dot{A}\frac{\gamma}{M}+A\frac{D}{M} &= 0\\
-2\dot{A}\omega_d-A\omega_d\frac{\gamma}{M} &= 0
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung soll für alle Zeiten t erfüllt sein:

$$\Rightarrow \qquad \ddot{A} - A\omega_d^2 + \dot{A}\frac{\gamma}{M} + A\frac{D}{M} = 0 \qquad (1)$$

$$-2\dot{A}\omega_d - A\omega_d\frac{\gamma}{M} = 0 \qquad (2)$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{2\tau}A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

$$\ddot{A}(t) = \frac{1}{4\tau^2}A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

Gl. 2: $$-2 \cdot \left(-\frac{1}{2\tau}A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}\right)\omega_d - A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}\omega_d\frac{\gamma}{M} = 0 \qquad \Big|: A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \omega_d$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M} \qquad \Rightarrow \tau = \frac{M}{\gamma}$$

Diese Gleichung soll für alle Zeiten t erfüllt sein:

$$\Rightarrow \qquad \ddot{A} - A\omega_d^2 + \dot{A}\frac{\gamma}{M} + A\frac{D}{M} = 0 \qquad (1)$$

$$-2\dot{A}\omega_d - A\omega_d\frac{\gamma}{M} = 0 \qquad (2)$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \qquad \dot{A}(t) = -\frac{1}{2\tau}A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \qquad \ddot{A}(t) = \frac{1}{4\tau^2}A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

$$\tau = \frac{M}{\gamma}$$

Gl. 1: $\ddot{A} - A\omega_d^2 + \dot{A}\frac{\gamma}{M} + A\frac{D}{M} = 0$

$$\frac{1}{4\tau^2}A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} - A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}\omega_d^2 + \left(-\frac{1}{2\tau}A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}\right)\frac{\gamma}{M} + A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}\frac{D}{M} = 0 \qquad \Big| : A_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

$$\frac{1}{4\tau^2} - \omega_d^2 - \frac{1}{2\tau}\frac{\gamma}{M} + \frac{D}{M} = 0 \qquad \Big| \text{Einsetzen: } \frac{\gamma}{M} = \frac{1}{\tau}$$

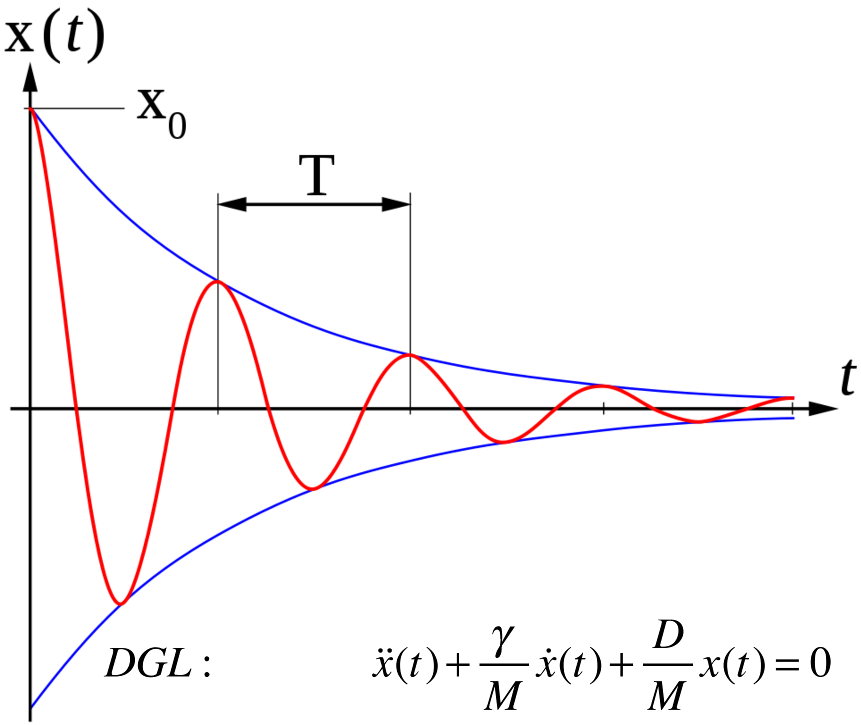
$$\frac{1}{4\tau^2} - \omega_d^2 - \frac{1}{2\tau}\frac{1}{\tau} + \frac{D}{M} = 0 \qquad \Big| +\omega_d^2$$

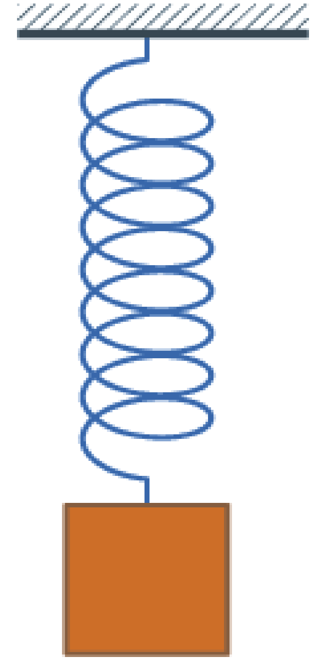
$$\frac{1}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau^2} + \frac{D}{M} = \omega_d^2 \qquad \Big| \text{Hauptnenner}$$

$$\frac{1}{4\tau^2} - \frac{2}{4\tau^2} + \frac{D}{M} = \omega_d^2$$

$$\frac{D}{M} - \frac{1}{4\tau^2} = \omega_d^2$$

Gedämpfte Schwingungen





DGL : $\ddot{x}(t)+\frac{\gamma}{M}\dot{x}(t)+\frac{D}{M}x(t)=0$

Beobachtung: $A(t)=A_0\cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$ $[\tau]=s$

Ansatz: $x(t)=A(t)\cdot\cos\left(\omega_d\cdot t+\varphi\right)$

Lösung: $\tau=\frac{M}{\gamma}$ $[\gamma]=\frac{kg}{s}$ $\Rightarrow$ $\left[\frac{\gamma}{M}\right]=\frac{1}{s}$

$\omega_d^2=\frac{D}{M}-\frac{1}{4\tau^2}$ $\omega_0^2=\frac{D}{M}$ für die ungedämpfte Schwingung