Moderne Methoden der Datenverarbeitung in der Physik I

Prof. Dr. Stefan Schael / Dr. Thomas Kirn
I. Physikalisches Institut
RWTH Aachen

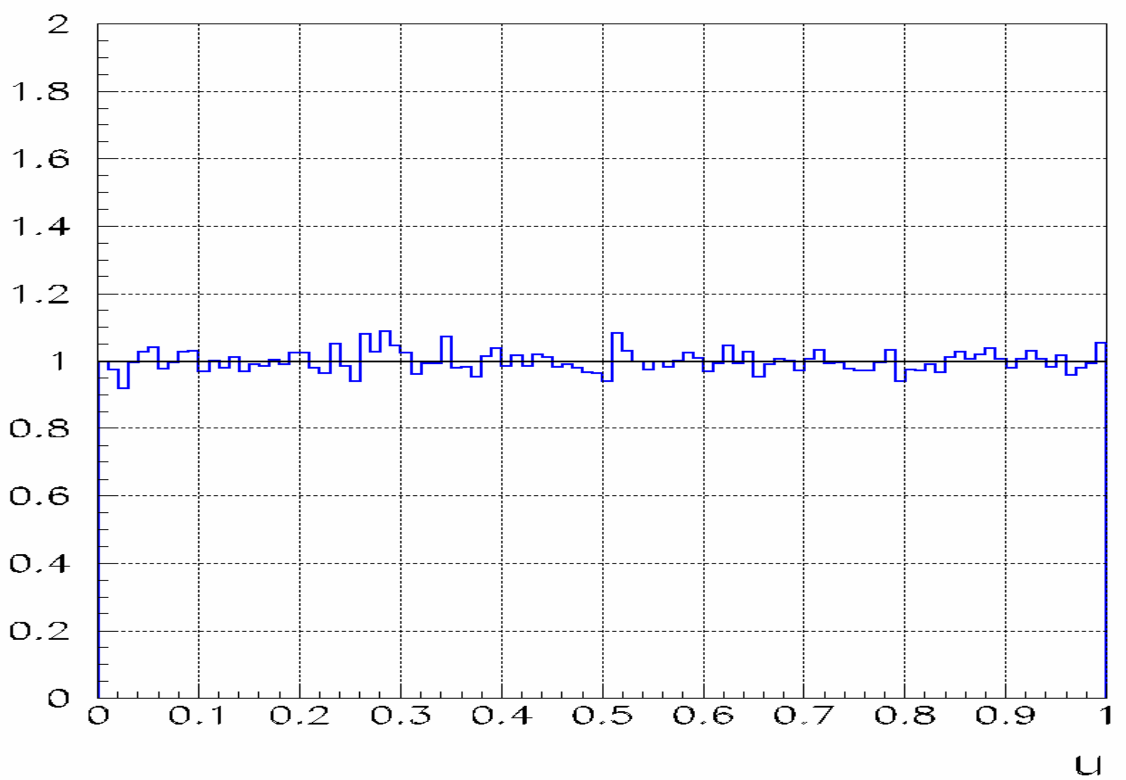
- **MAPLE II, Krypthographie**
- **Wahrscheinlichkeit**
- **Zufallszahlen, Wahrscheinlichkeitsdichten, Zentraler Grenzwertsatz**
- **Fehlerfortpflanzung**
- **Maximum Likelihood, Stichproben, Mittelwert & Varianz**

Wiederholung: Gleichförmig verteilte Zufallszahlen

Generator

$$n_{j+1} = (a\, n_j + c) \bmod m$$

z.B. c=0, m=2147483399 und a = 40692 gibt eine Periode von (m-1) ≈ 2 10^9



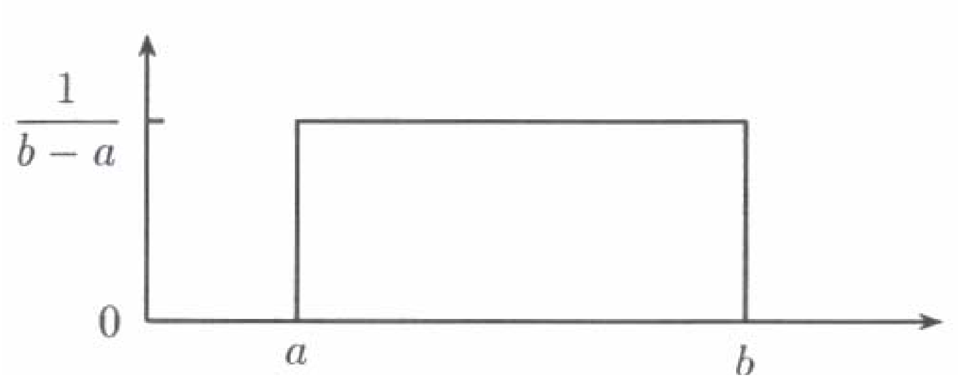
Aufwendigere Algorithmen erlauben Perioden von 10^{43}.
Dazu werden zwei Folgen von Zufallszahlen mit je einem Generator erzeugt und durch Kombination (+,-) eine neue Zufallszahl generiert.

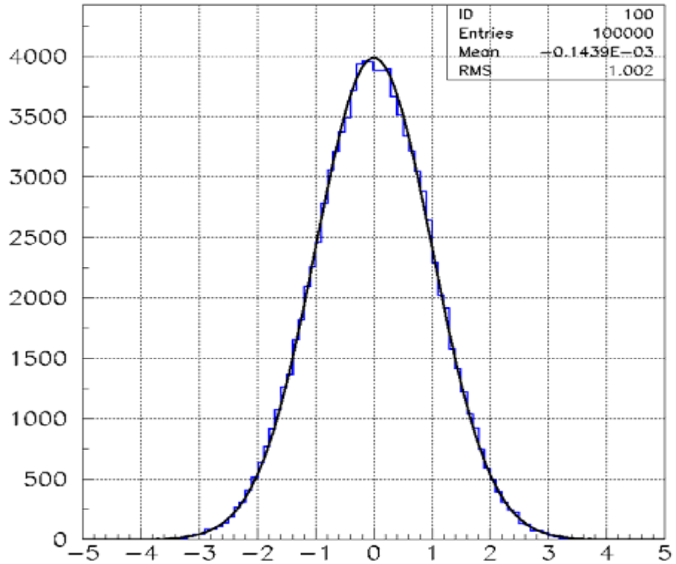
Wiederholung: Gaußverteilte Zufallszahlen

Ein einfacher, aber nur angenähert richtiger Zufallszahlengenerator für normalverteilte Zufallszahlen (Mittelwert 0.0, Standardabweichung 1.0) basiert auf dem Zentralen Grenzwert Satz:

$$z_i = \sum_{j=1}^{12} u_j - 6$$

Die u_j sind gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1.





Normalverteilte Zufallszahlen mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ erhält man aus der standardisierten, normalverteilten Zufallszahl z_i durch

$$x_i = \mu + \sigma z_i$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Wiederholung: Zweidimensionale Verteilungen I

Die Definition der Mittelwerte und Varianzen sind nahe liegende Verallgemeinerungen des eindimensionalen Falls:

$$\langle x \rangle = E[x] = \iint x f(x,y)\,dx\,dy = \int x f_y(x)\,dx$$

$$\langle y \rangle = E[y] = \iint y f(x,y)\,dx\,dy = \int y f_x(y)\,dy$$

$$V[x] = \iint (x - \langle x \rangle)^2 f(x,y)\,dx\,dy = \sigma_x^2$$

$$V[y] = \iint (y - \langle y \rangle)^2 f(x,y)\,dx\,dy = \sigma_y^2$$

Die Kovarianz zwischen x und y ist definiert als:

$$C(x,y) = \iint (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) f(x,y)\,dx\,dy$$

Wir nennen zwei Variablen unkorreliert wenn C(x,y)=0

Zwei unkorrelierte Zufallsvariablen sind im allgemeinen nicht unabhängig !

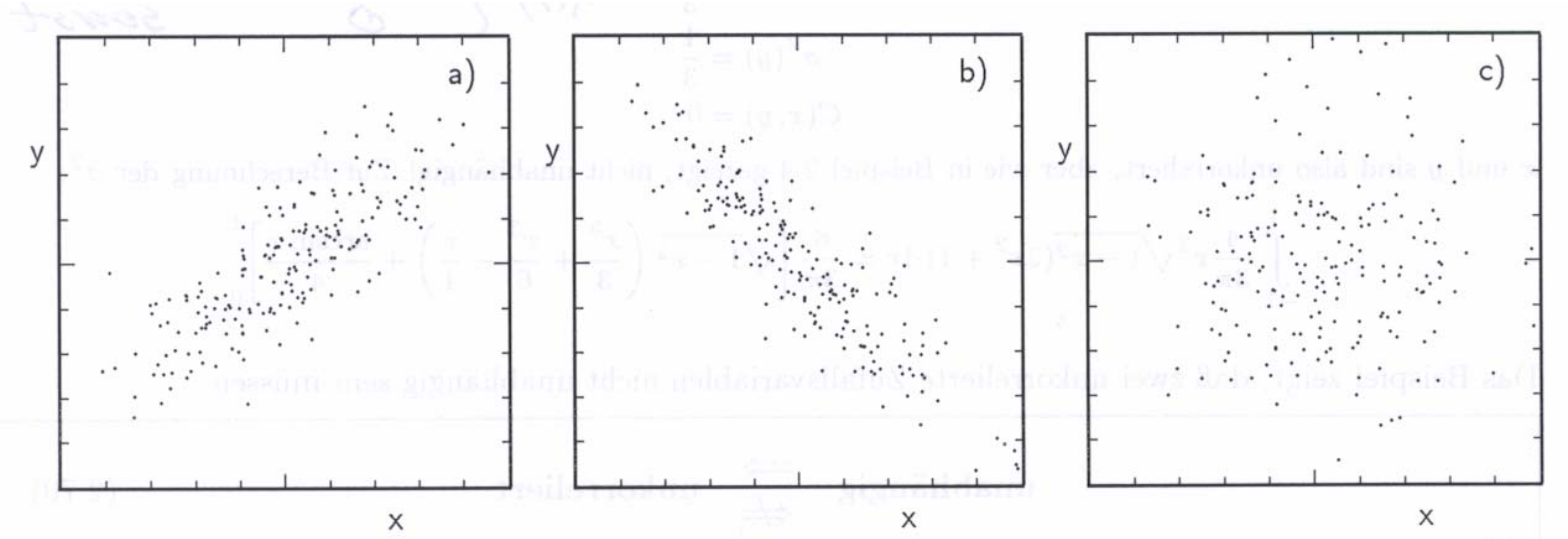
unabhängig $\Rightarrow$ unkorreliert   aber nicht unkorreliert $\not\Rightarrow$ unabhängig

Wiederholung: Kovarianz und Korrelation

Es erweist sich häufig als bequem, anstelle der Kovarianz den Korrelations-koeffizienten zu benutzen:

$$\rho(x,y) = \frac{C(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

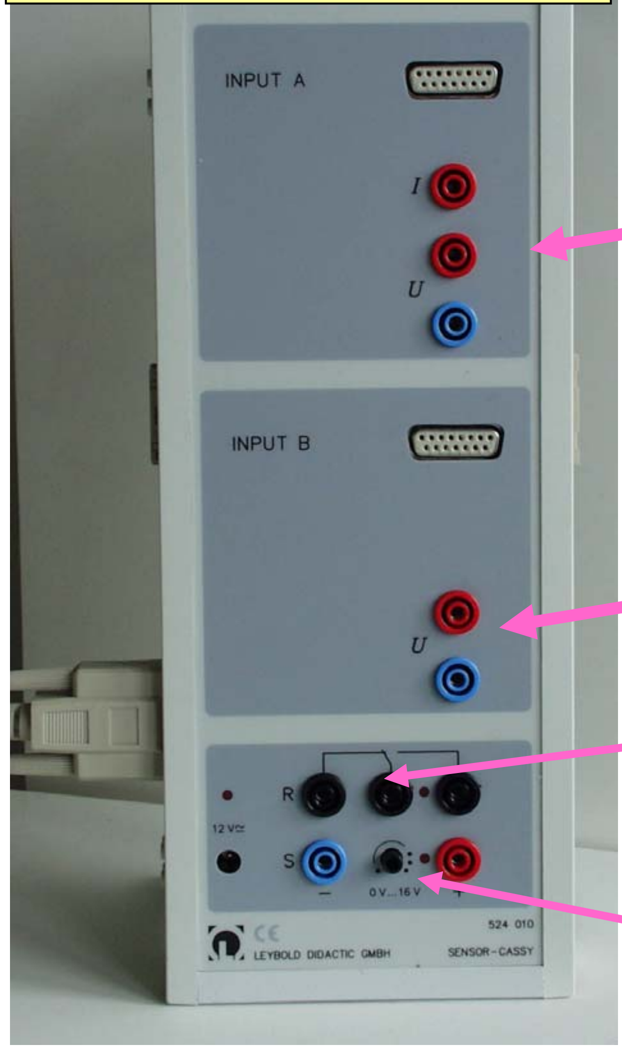
Der Korrelationskoefizient gibt ein Maß für die Abhängigkeit der Variablen x und y voneinander. Es gilt: $-1.0 \le \rho(x,y) \le 1.0$



a) $\rho = +0.85$ **b) $\rho = -0.90$** **c) $\rho = 0$**

Messung gleichverteilter und Gaußverteilter Größen

Sensor-Cassy Interface



4-fach galvanisch getrennt:

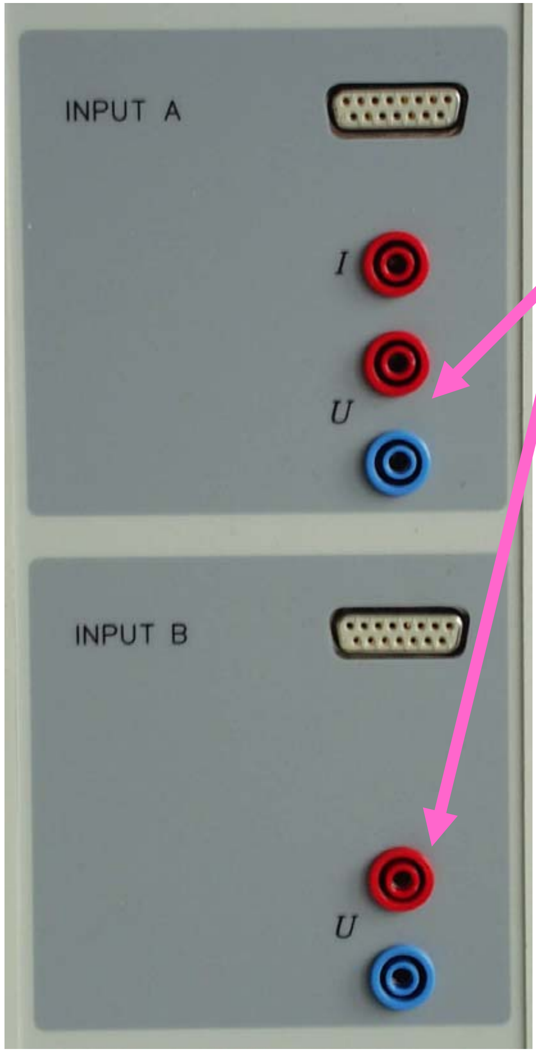
Eingang A (I,U)

Eingang B (U)

Relais R

Spannungsquelle S (0 – 16V)

Messung gleichverteilter und Gaußverteilter Größen

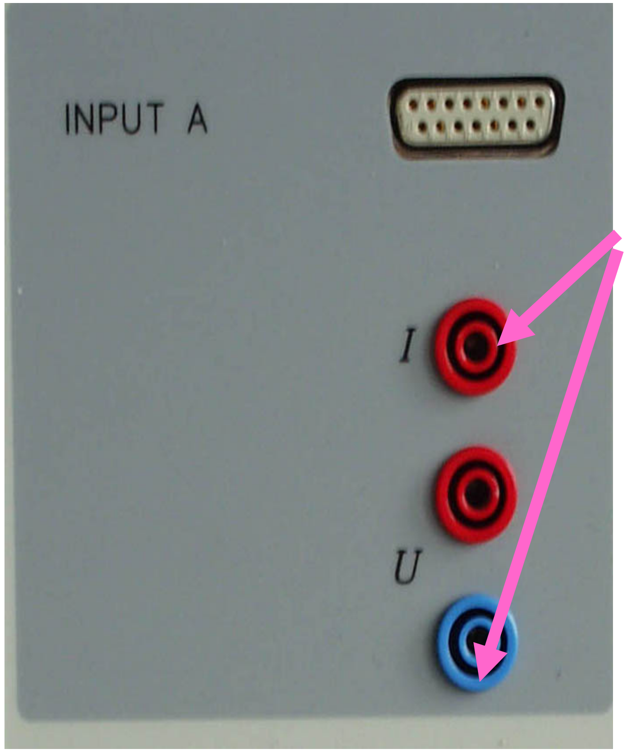


5 analoge Eingänge

2 analoge Spannungseingänge A und B:

- Auflösung: 12 Bit ($2^{12} = 4096$)
- Messbereiche: ± 0,3/1/3/10/30/100 V
- Digitalisierung: ± 0,15 mV/…/ 48,8mV
- Eingangswiderstand: 1 MΩ
- Abtastrate: max. 200.000 Werte/s (=100.000 Werte/s pro Eingang)
- Anzahl Messwerte: max. 32000 (= 16000/ Eingang)

Messung gleichverteilter und Gaußverteilter Größen

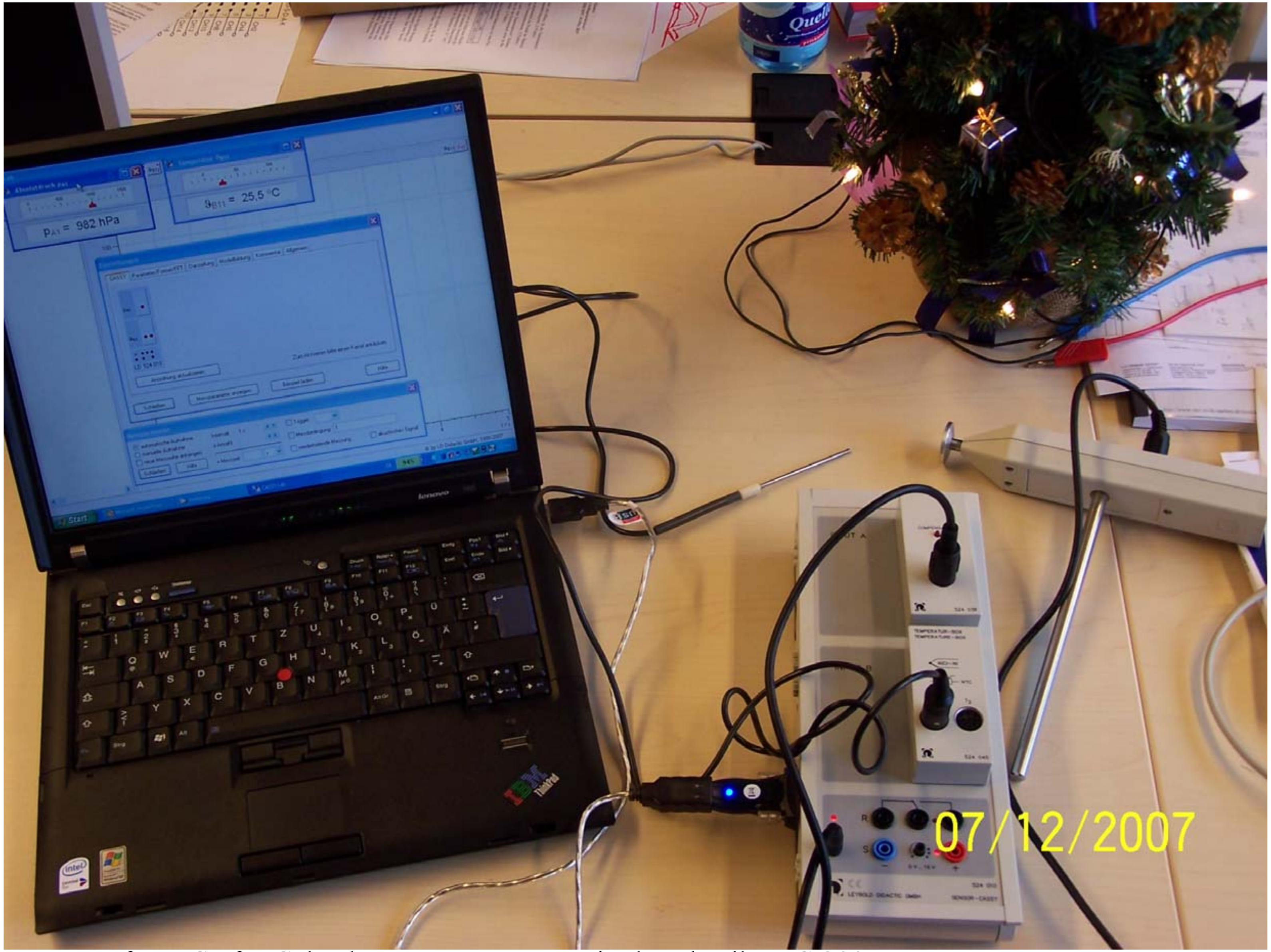


Eingang A:

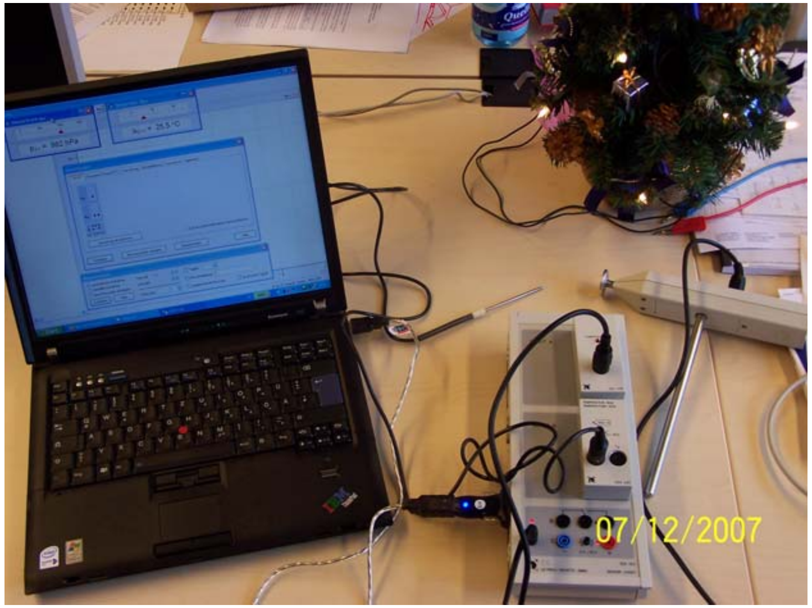
1 analoger Stromeingang :

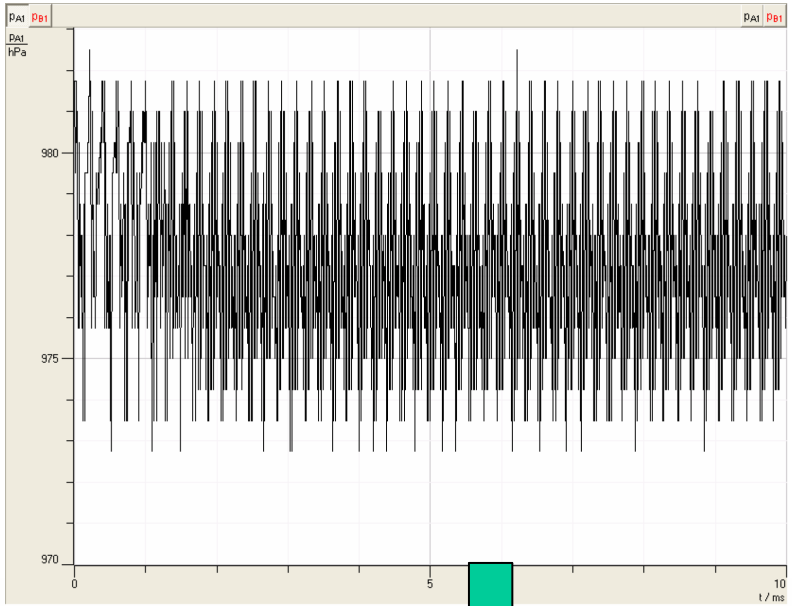
- Messbereiche: ± 0,1/0,3/1/3 A
- Digitalisierung: ± 0,05 mA/ … / 1,5 mA
- Eingangswiderstand: < 0,5 Ω

Messung des Luftdrucks und der Temperatur



Messung des Luftdrucks





$$< x > = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

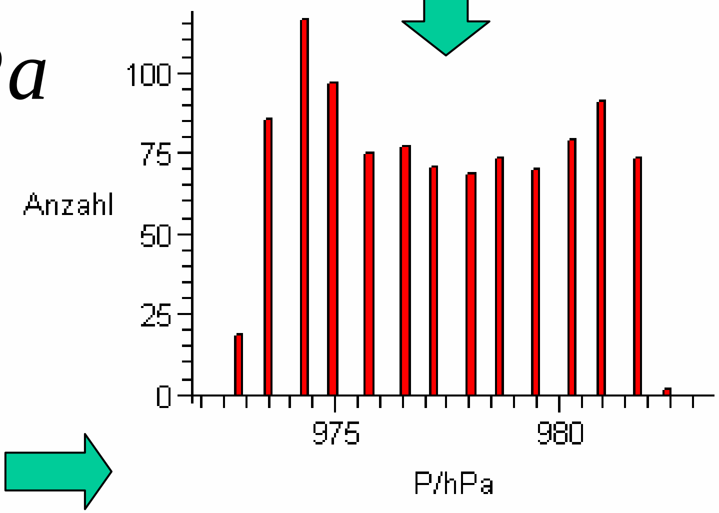
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2}{n-1}}$$

$$\sigma_{<x>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

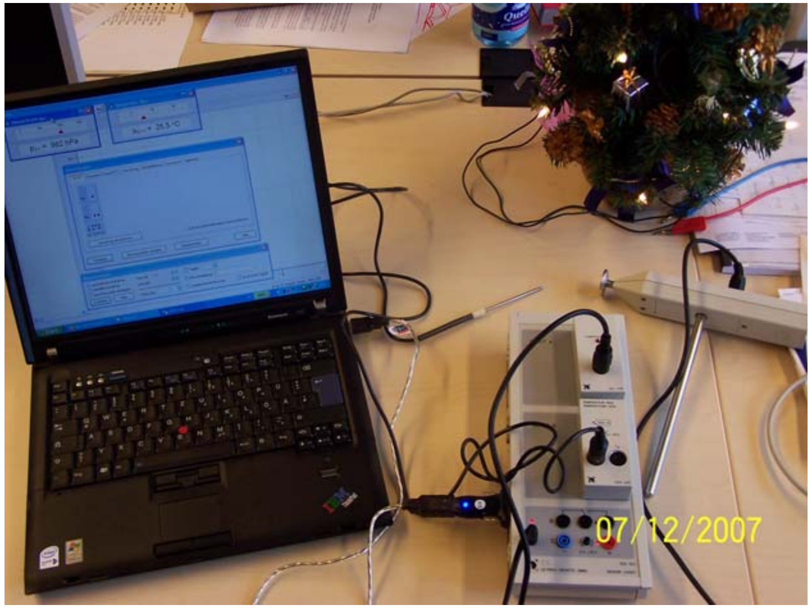
$$< p > = 977.3 hPa$$

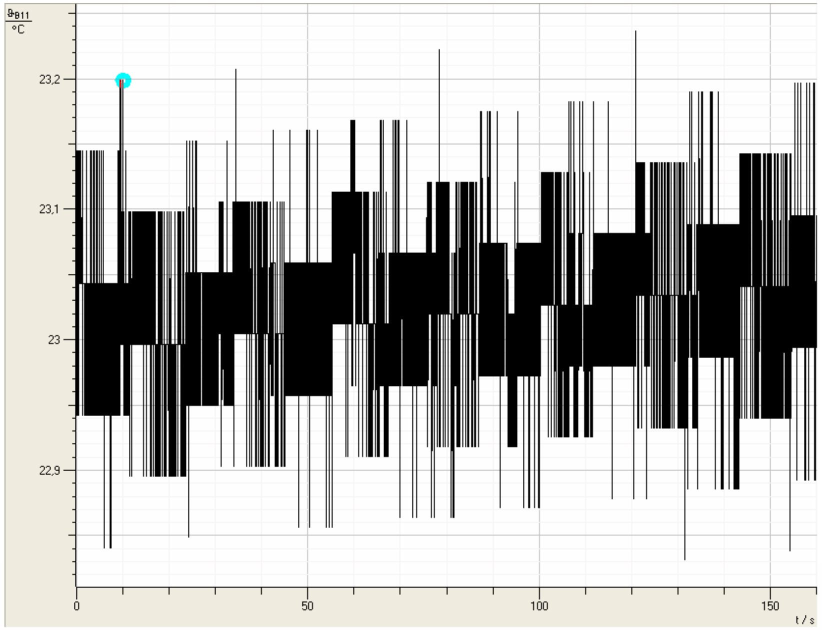
$$V_p = 7.9 (hPa)^2$$

$$\sigma_p = 2.8 hPa$$



Messung der Temperatur





$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

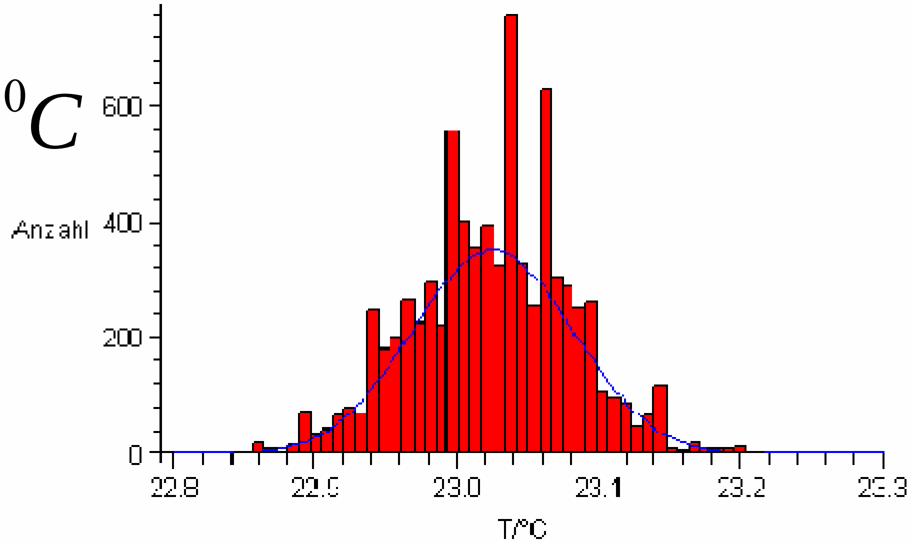
$$\langle T \rangle = 23.025\,^0C$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}$$

$$V_T = 0.12\,^0C^2$$

$$\sigma_T = 0.06\,^0C$$

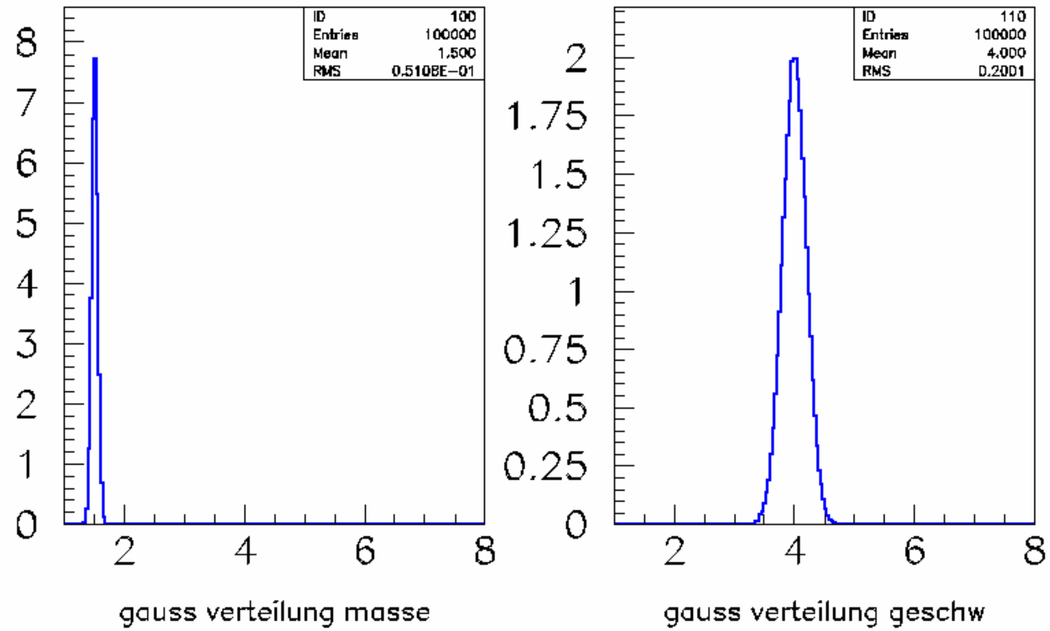
$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Transformation von Variablen, 2-dim Wahrscheinlichkeitsdichten

- **Der Impuls eines Teilchens ist: p = m*v**
- **Gemessen seien: m = (1.50 +/- 0.05) kg und v = (4.0 +/- 0.2) m/s**
- **Was wären <p> und σ_p ?**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{0.05}{1.5} = 0.033 << \frac{\sigma_v}{v} = \frac{0.2}{4} = 0.05$$

Transformation von Mittelwert und Varianz: Fehlerfortpflanzung I

- **die Zufallsvariable x_1 mit Mittelwerte μ_1 und Varianz V_1 sei entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_1)$ verteilt.**

- **Betrachten wir zunächst eine 1-dim. Funktion $y(x_1)$. Was können wir über Mittelwert und Varianz von y sagen ?**

- **Dazu entwickeln wir y in einer Taylorreihe um $y(\mu_1)$:**

$$y(x_1) = y(\mu_1) + \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]_{x_1=\mu_1} (x_1 - \mu_1) + \ldots$$

- **In erster Ordnung gilt:**

$$E[y(x_1)] = y(\mu_1)$$

da $E[x_1 - \mu_1] = 0$

Fehlerfortpflanzung II

Was ist die Varianz von $y(x_1)$?

$$E[(y-E[y])^2] = E[y^2 - 2yE[y] + E[y]^2]$$
$$= E[y^2] - 2E[y]^2 + E[y]^2$$
$$= E[y^2] - E[y]^2$$

$$E[y^2(x_1)] \approx E\left[\left(y(\mu_1) + \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right](x_1-\mu_1)\right)^2\right]$$

$$= y^2(\mu_1) + 2y(\mu_1)\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]_{x_1=\mu_1} E[(x_1-\mu_1)] + \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x_1=\mu_1} E\left[(x_1-\mu_1)^2\right]$$

$$E[(x_1-\mu_1)] = 0$$

$$= y^2(\mu_1) + \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x_1=\mu_1} V_1 \Rightarrow \sigma_y^2 \approx \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x_1=\mu_1} V_1$$

Beispiel I: p=m*v

$$E[y(x_1)] = y(\mu_1) \qquad \sigma_y^2 \approx \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x_1=\mu_1} V_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x_1=\mu_1} \sigma_{x_1}^2$$

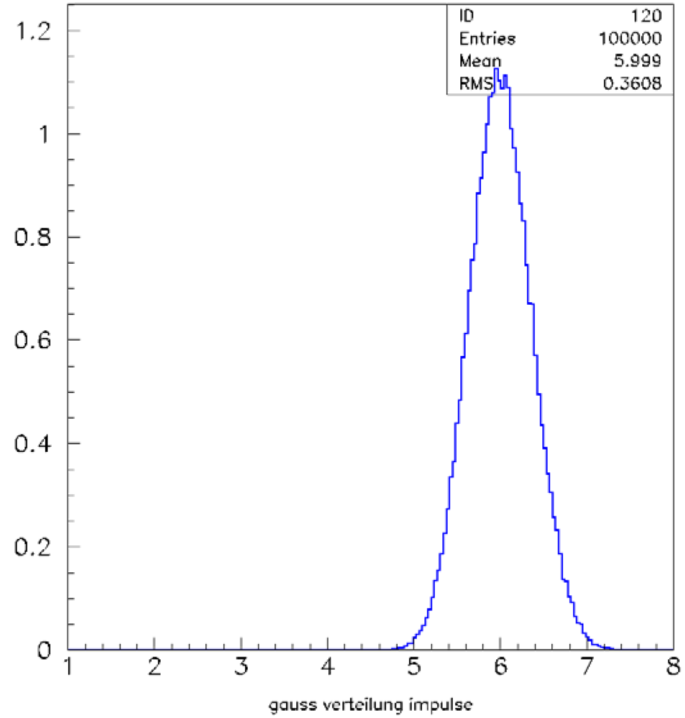
- **Der Impuls eines Teilchens ist: p = m*v**
- **Gemessen seien: m = (1.50 +/- 0.05) kg und v = (4.0 +/- 0.2) m/s**
- **Was wären <p> und σ_p (σ_m/m << σ_v/v)?**

$$< p >= m\cdot < v >= 1.5\cdot 4.0\,\frac{kg\cdot m}{s} = 6.0\,\frac{kg\cdot m}{s}$$

$$\sigma_p^2 = \left[\frac{dp}{dv}\right]^2 \sigma_v^2 = m^2\sigma_v^2 = 0.09\left(\frac{kg\cdot m}{s}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_p = 0.3\,\frac{kg\cdot m}{s}$$

$$\Rightarrow p = (6.0 \pm 0.3)\,\frac{kg\cdot m}{s}$$



Fehlerfortpflanzung III

- **die Zufallsvariablen (x_1,x_2) mit Mittelwerten (μ_1, μ_2) und Varianz V seien entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_1, x_2)$ verteilt.**

- **Betrachten wir zunächst eine 1-dim. Funktion $y(x_1, x_2)$. Was können wir über Mittelwert und Varianz von y sagen ?**

- **Dazu entwickeln wir y in einer Taylorreihe um $y(\mu_1, \mu_2)$:**

$$y(x_1, x_2) = y(\mu_1, \mu_2) + \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]_{x=\mu} (x_1 - \mu_1) + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]_{x=\mu} (x_2 - \mu_2) + \ldots$$

- **In erster Ordnung gilt:**

$$E[y(x_1, x_2)] = y(\mu_1, \mu_2)$$

da $E[x_1 - \mu_1]=0$ und $E[x_2 - \mu_2]=0$

Fehlerfortpflanzung IV

Was ist die Varianz von $y(x_1, x_2)$?

$$E[(y-E[y])^2] = E[y^2 - 2yE[y] + E[y]^2]$$
$$= E[y^2] - 2E[y]^2 + E[y]^2$$
$$= E[y^2] - E[y]^2$$

$$E[y^2(x_1,x_2)] \approx E\left[\left(y(\mu_1,\mu_2) + \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right](x_1-\mu_1) + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right](x_2-\mu_2)\right)^2\right]$$

$$= y^2(\mu_1,\mu_2) + 2y(\mu_1,\mu_2)\left(\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]_{x=\mu} E[(x_1-\mu_1)] + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]_{x=\mu} E[(x_2-\mu_2)]\right) \qquad E[(x_i-\mu_i)] = 0$$

$$+\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x=\mu} E\left[(x_1-\mu_1)^2\right] + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]^2_{x=\mu} E\left[(x_2-\mu_2)^2\right] + 2\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]_{x=\mu}\left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]_{x=\mu} E[(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)]$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_y^2 = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x=\mu} V_{11} + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]^2_{x=\mu} V_{22} + 2\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]_{x=\mu}\left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]_{x=\mu} V_{12}$$

Beispiel II: p=m*v

$$E[y(x_1,x_2)] = y(\mu_1,\mu_2) \qquad \sigma_y^2 = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]^2_{x=\mu} \sigma_{x_1}^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]^2_{x=\mu} \sigma_{x_2}^2 + 2\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right]_{x=\mu}\left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right]_{x=\mu} \sigma_{x_1 x_2}$$

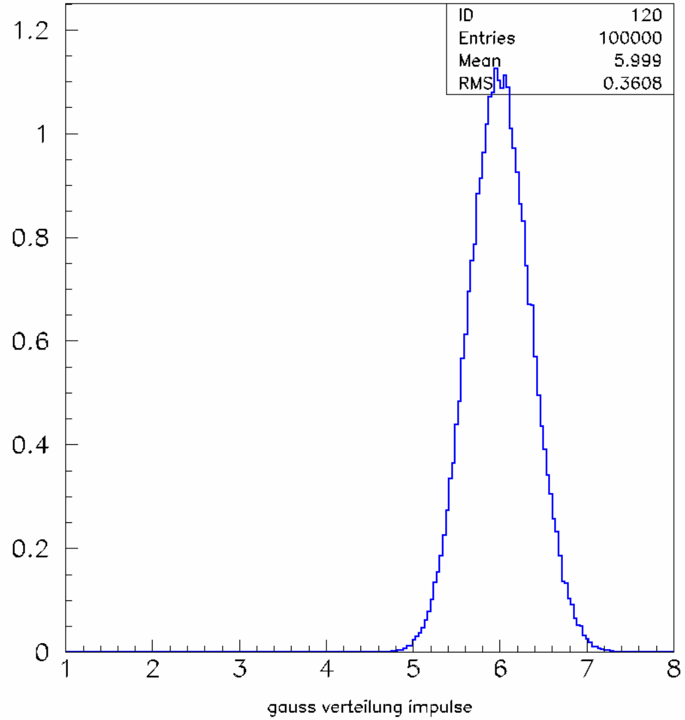
- **Der Impuls eines Teilchens ist: p = m*v**
- **Gemessen seien: m = (1.50 +/- 0.05) kg und v = (4.0 +/- 0.2) m/s**
- **Was wären <p> und σ_p ?**

$$< p > = < m > \cdot < v > = 1.5 \cdot 4.0 \frac{kg \cdot m}{s} = 6.0 \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$\sigma_p^2 = \left[\frac{dp}{dm}\right]^2 \sigma_m^2 + \left[\frac{dp}{dv}\right]^2 \sigma_v^2 = v^2\sigma_m^2 + m^2\sigma_v^2$$

$$\Rightarrow \sigma_p = 0.36 \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$\Rightarrow p = (6.00 \pm 0.36) \frac{kg \cdot m}{s}$$

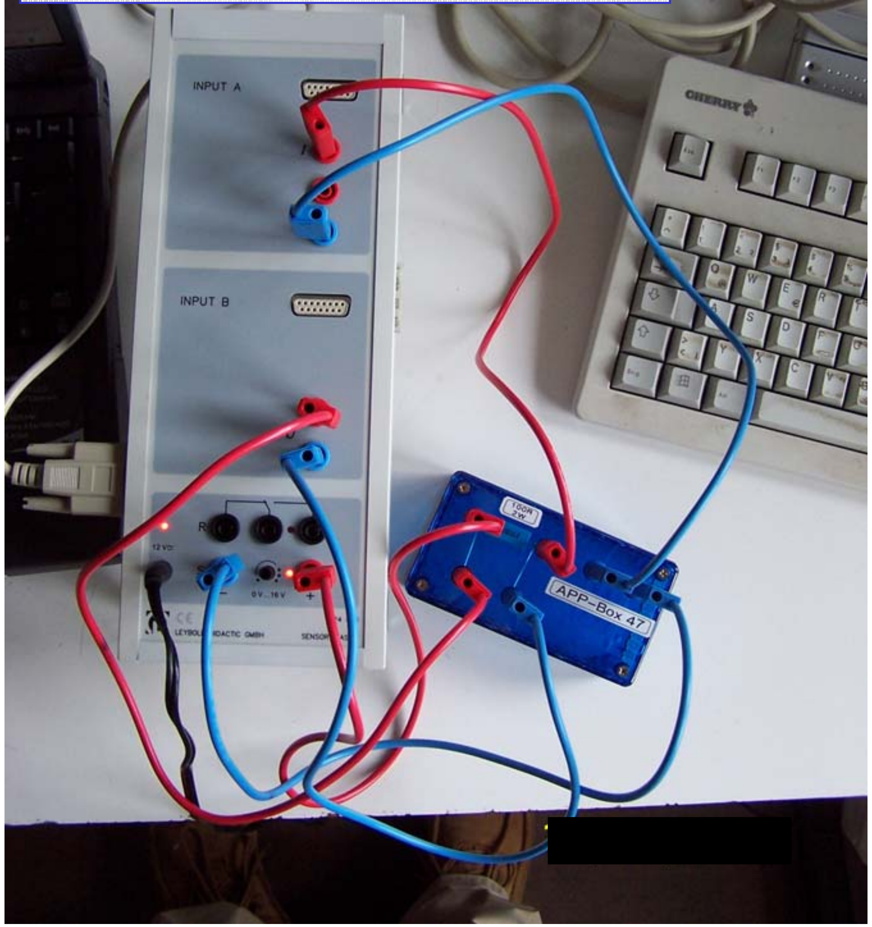


Messung von Strom und Spannung und Bestimmung des Ohmschen Widerstandes

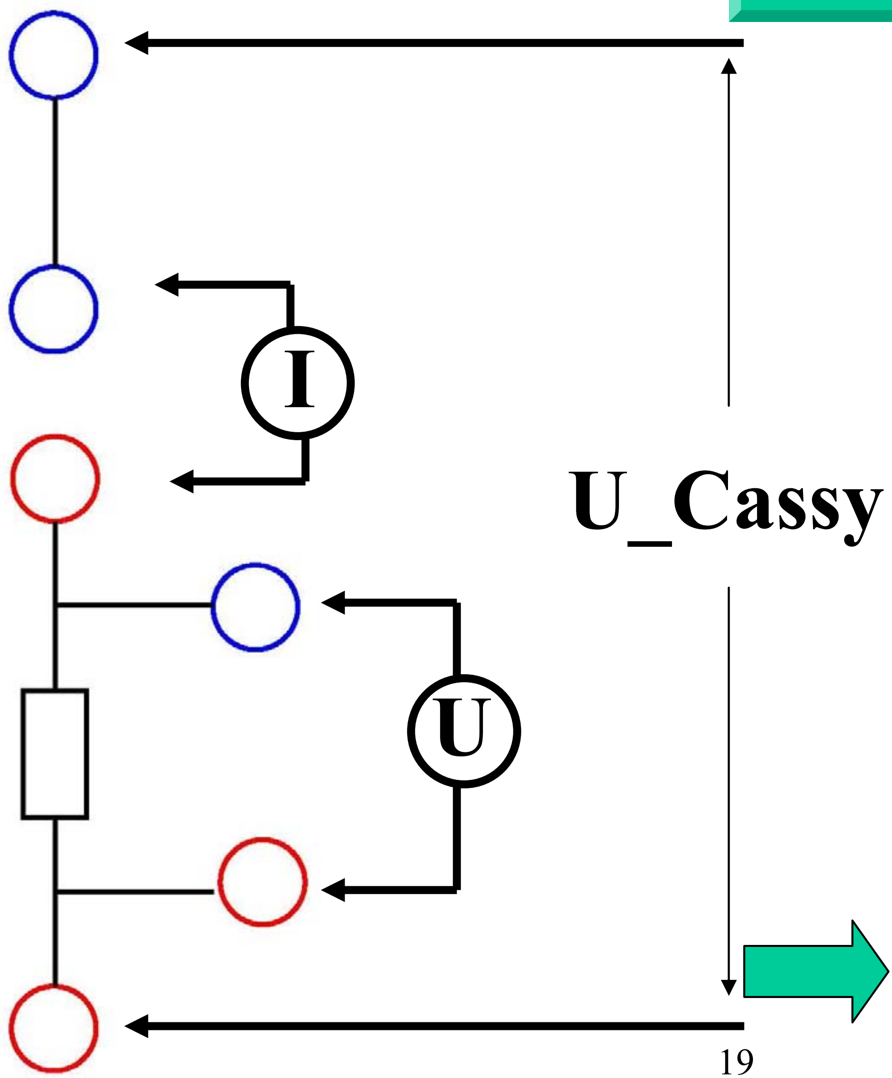
Messbereich:

I_{A1}= -0.1A bis 0.1 A

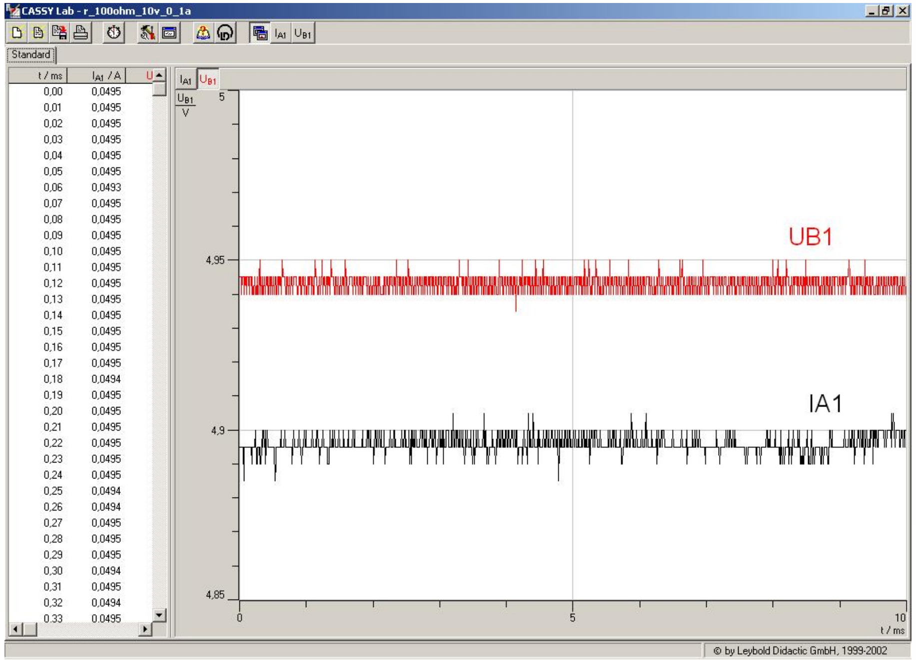
U_{B1}= -10V bis 10V

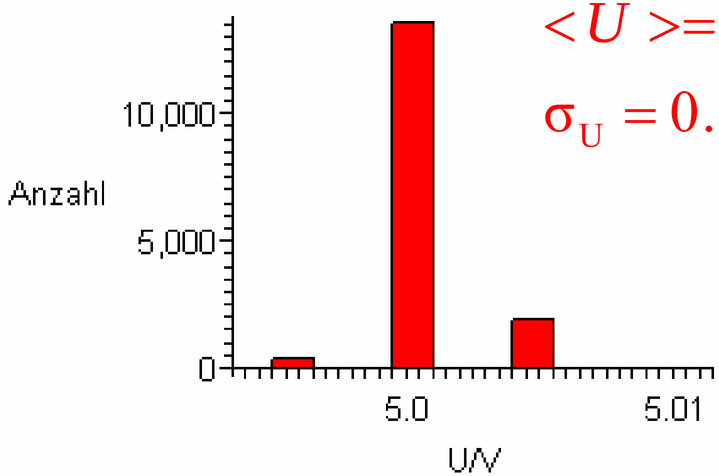


[redacted]



Messung von Strom und Spannung und Bestimmung des Ohmschen Widerstandes





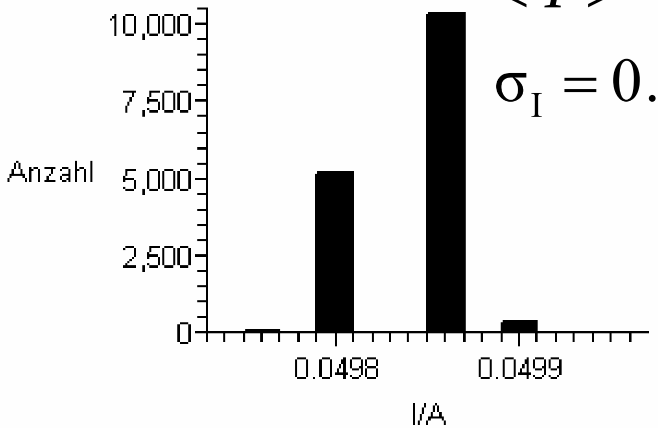
$$<U>= 5.0005V$$

$$\sigma_U = 0.00187V$$

$$<\mathbf{x}>=\frac{1}{\mathbf{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-<\mathbf{x}>)^2}{\mathbf{n}-1}}$$

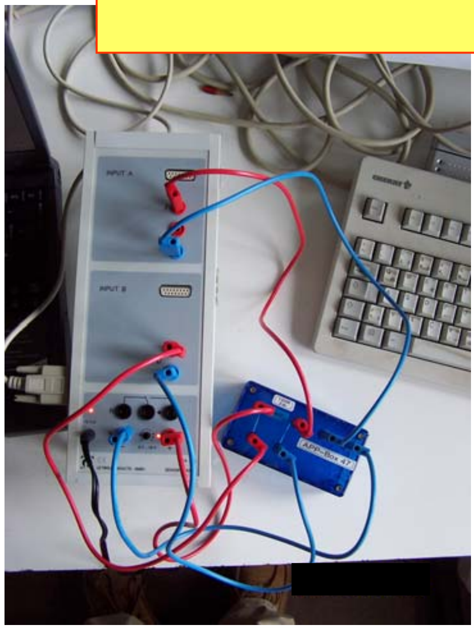
$$\sigma_{<x>}=\frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}$$

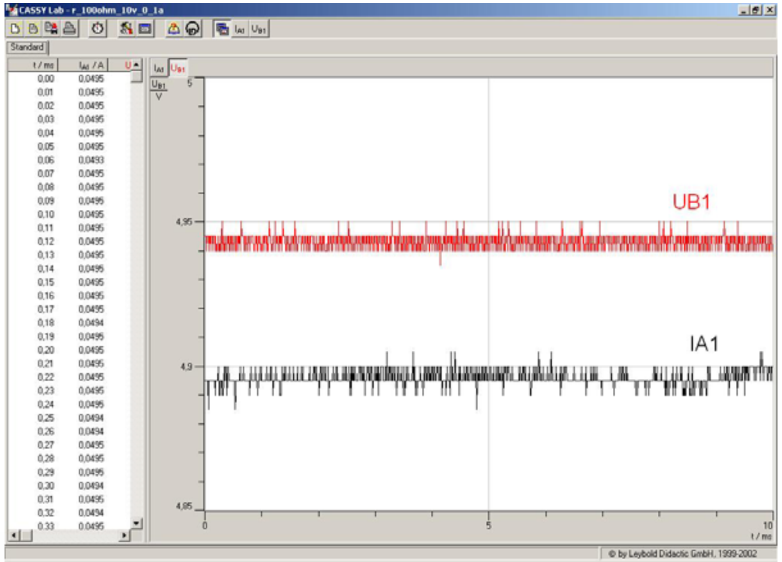


$$<I>= 0.049834A$$

$$\sigma_I = 0.000026A$$

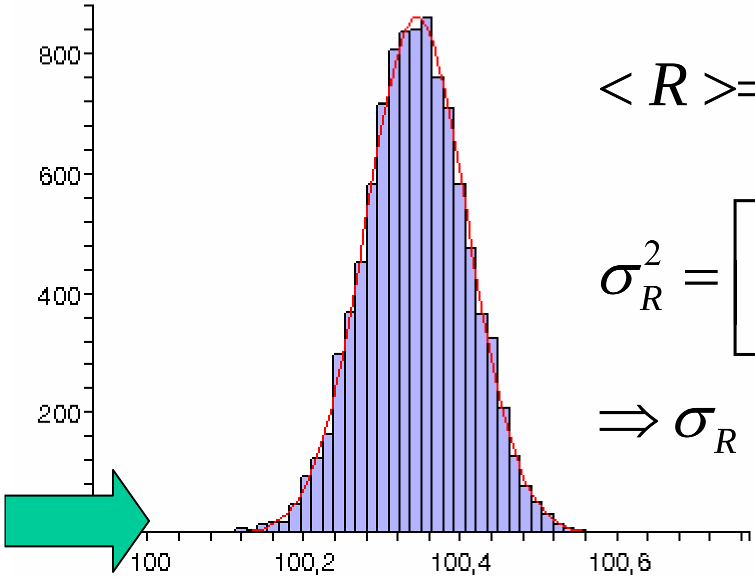
Messung von Strom und Spannung und Bestimmung des Ohmschen Widerstandes





$$<U> = 5.0005V$$
$$\sigma_U = 0.00187V$$

$$<I> = 0.049834A$$
$$\sigma_I = 0.000026A$$



$$<R> = <U>/<I> = 5.0005/0.049834\frac{V}{A} = 100.34\Omega$$

$$\sigma_R^2 = \left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]^2 \sigma_U^2 + \left[\frac{\partial R}{\partial I}\right]^2 \sigma_I^2 = \left(\frac{1}{I}\right)^2 \sigma_U^2 + \left(\frac{U}{I^2}\right)^2 \sigma_I^2$$

$$\Rightarrow \sigma_R = 0.065\Omega \qquad \Rightarrow R = (100.34 \pm 0.07)\Omega$$

Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichten

- **Die Überlegungen für 2-dim. Wahrscheinlichkeitsdichten lassen sich leicht auf n-Dimensionen verallgemeinern.**

- **Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines n-Vektors $\underline{x}$ mit Komponenten x_i kann geschrieben werden als $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.**

- **Der Mittelwert der Variablen x_i ist:**

$$E[x_i] = \langle x_i \rangle = \int x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int x_i f(\vec{x}) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

- **Als Verallgemeinerung der Varianz definiert man die Kovarianzmatrix:**

$$V = V[\vec{x}] = E[(\vec{x} - E[\vec{x}])(\vec{x} - E[\vec{x}])^T]$$

- **Damit ergeben sich als Diagonalelemente der Matrix V die Varianzen und als Nicht-Diagonalelemente die Kovarianzen:**

$$V_{ii} = \mathrm{var}(x_i) \quad = \int (x_i - \langle x_i \rangle)^2 f(\vec{x}) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$V_{ij} = \mathrm{cov}(x_i, x_j) = \int (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) f(\vec{x}) dx_1 dx_2$$

Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichten II

- **Die Kovarianzmatrix ist eine symmetrische n x n-Matrix.**

$$V = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cov}(x_1,x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1,x_n) \\ \mathrm{cov}(x_2,x_1) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2,x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_n,x_1) & \mathrm{cov}(x_n,x_2) & \cdots & \mathrm{var}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

- **Die Diagonalelemete var(x_i) sind stets positiv, man schreibt daher häufig var(x_i)=σ_i^2.**
- **Für die Nicht-Diagonalelemete die positiv und negativ sein können schreibt man auch cov(x_i,x_j)=σ_{ij}**
- **Wenn als Resultat einer Messung Fehler angegeben werden, so sind dies gewöhnlich die Wurzeln der Diagonalelemente.**
- **Die Konfidenzintervalle im mehrdimensionalen Raum hängen von den Kovarianzen ab, wenn die die Datenpunkte korreliert sind.**

Fehlerfortpflanzung I

- n Zufallsvariablen $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ mit Mittelwerten $(\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_n)$ und Kovarianz-Matrix V_{ij} seien entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ verteilt.

- Betrachten wir zunächst eine 1-dim. Funktion $y(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Was können wir über Mittelwert und Varianz von y sagen ?

- Dazu entwickeln wir y in einer Taylorreihe um $y(\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_n)$:

$$y(\vec{x}) = y(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_i - \mu_i) + \cdots$$

- In erster Ordnung gilt:

$$E[y(\vec{x})] = y(\vec{\mu})$$

da $E[x_i - \mu_i]=0$

Fehlerfortpflanzung II

Was ist die Varianz von $y(x_1,x_2,\ldots,x_n)$?

$$\begin{aligned}E[(y-E[y])^2] &= E[y^2-2yE[y]+E[y]^2]\\ &= E[y^2]-2E[y]^2+E[y]^2\\ &= E[y^2]-E[y]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[y^2(\vec{x})] &\approx E\left[\left(y(\vec{\mu})+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}(x_i-\mu_i)\right)^2\right]\\ &= y^2(\vec{\mu})+2y(\vec{\mu})\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}E[(x_i-\mu_i)] \qquad E[(x_i-\mu_i)]=0\\ &+E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}(x_i-\mu_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial y}{\partial x_j}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}(x_j-\mu_j)\right)\right]\\ &= y^2(\vec{\mu})+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}V_{ij} \Rightarrow \sigma_y^2 \approx \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}V_{ij}\end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung III

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} V_{ij}$$

Für den Fall das die x_i nicht korreliert sind, d.h. $V_{ii}=\sigma_i^2$ und $V_{ij}=0$ für i#j ergibt sich:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}^2 \sigma_i^2$$

Genauso erhält man für einen Satz von m Funktionen $y_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, ..., $y_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ die Kovarianz-Matrix:

$$U_{kl} = \mathrm{cov}[y_k, y_l] \approx \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} V_{ij}$$

Verwendete Links bzw Maple-Programme und Dateien

Seite 3: 1. Link (linker grüner Pfeil): http://www.mathe-online.at/galerie/wstat3.html
2. Link (rechter grüner Pfeil):
http://statistik.wu-wien.ac.at/mathstat/hatz/vo/applets/cenlimit/cenlim.html

Seite 9: Verwendetes Programm Cassy-Lab zur Datenaufzeichnung:
http://www.leybold-didactic.de/software/524200de.exe

Seite 10: Maple-Programme: a) Praktikum.m b) Praktikum.mws c) druck+temp.mws
verwendete Datei: P_t_1b.lab und T_t_7.lab
Link: http://www.klimageo.rwth-aachen.de/wtst/timecheck.php

Seite 18: Maple-Programm: impuls.mws

Seite 19: Verwendetes Programm Cassy-Lab zur Datenaufzeichnung:
http://www.leybold-didactic.de/software/524200de.exe
Maple-Programm: U_I_Mess2.mws
verwendete Datei: 100R_U_I_t_c.lab

Seite 21: Maple-Programm: U_I_MC2.mws